Comentario sobre la Reflexión

Supongamos que en una región del espacio, la energía potencial de la partícula es $U = U(x)$.

La longitud de onda de la onda de De Broglie es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\hbar k} = \frac{2\pi}{k}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U(x))}} = \frac{h}{\sqrt{2m}}\left(E-U(x)\right)^{-1/2} \qquad (1)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{2m}}\left(E-U(x)\right)^{-3/2}\left(-\frac{dU(x)}{dx}\right) \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \left(E-U(x)\right)^{-3/2} = \left(\frac{\sqrt{2m}}{h}\lambda\right)^{3} \qquad (3)$$

$$(2) \text{ y } (3) \Rightarrow \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{2m}}\left(\frac{\sqrt{2m}}{h}\lambda\right)^{3}\frac{dU(x)}{dx} \qquad (4)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2m}}{h}\right)^{2}\lambda^{3}\frac{dU(x)}{dx} \qquad (5)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{m}{h^2}\lambda^{3}\frac{dU(x)}{dx} \qquad (6)$$

$$d\lambda = \frac{m}{h^2}\lambda^{3}\,dU \qquad (7)$$

Mientras más baja es λ (alto k, alta E), menor será el cambio $d\lambda$ en la longitud de onda para un cambio dU dado.

$$(7) \Rightarrow \quad \Delta\lambda = \frac{d\lambda}{dx}\,\Delta x = \frac{m}{h^2}\,\lambda^3\,\frac{dU}{dx}\,\Delta x \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\frac{m}{h^2}\,\lambda^2\,\frac{dU}{dx}\right)\Delta x \qquad (9)$$

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ es el cambio fraccional de la longitud de onda debido a la variación de la energía potencial en una distancia Δx. La variación de la energía potencial $\Delta U = \frac{dU}{dx}\,\Delta x$ (10) depende claramente de $\frac{dU}{dx}$ que representa el cambio por unidad de longitud de U. Mientras más rápido cambie U en una distancia Δx, mayor será el cambio fraccional de λ.

Por otro lado: $$R = \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda_I} - \frac{2\pi}{\lambda_{II}}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{\lambda_I} + \frac{2\pi}{\lambda_{II}}\right)^2} \qquad (11)$$

Como $\lambda_{II} = \lambda_I + \Delta\lambda$ (12)

$$R = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_I} - \frac{1}{\lambda_I + \Delta\lambda}\right)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_I} + \frac{1}{\lambda_I + \Delta\lambda}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2}{\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2} \qquad (12)$$

$$R = \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{1+\Delta\lambda/\lambda}\right)\right)^2}{\left(\frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{1+\Delta\lambda/\lambda}\right)\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{1+\Delta\lambda/\lambda}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{1+\Delta\lambda/\lambda}\right)^2} \qquad (13)$$

Pero (9) $\Rightarrow$ $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\frac{m}{h^2}\lambda^2 \frac{dU}{dx}\right)\Delta x \qquad (14)$$

Las ecuaciones (14) y (13) establecen la relación entre el cambio de U $\Rightarrow$ el cambio de λ $\Rightarrow$ la reflexión de la partícula.

Si el cambio de U, esto es, $\Delta U = \frac{dU}{dx}\Delta x$, en una distancia Δx es pequeño, entonces por (14), el cambio fraccional de λ, esto es $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, es pequeño en esa distancia Δx.

Si el cambio fraccional de λ $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$ es pequeño, entonces en virtud de la ecuación (13), el término $\frac{1}{1+\Delta\lambda/\lambda}$ tiende a 1 y, en virtud de la misma ecuación, R tiende a cero. Esto representa el límite clásico.

En el límite clásico, al ser la energía total de la partícula mayor que su energía potencial, es decir, $E > U$,

la partícula (que en la física clásica no tiene onda asociada) no se refleja en $x = 0$.

Pero vemos que en el caso cuántico, aún siendo $E > U$, existe reflexión.

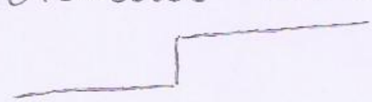
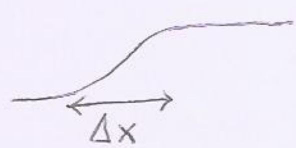
En el "mundo cuántico", el comportamiento clásico ocurriría si $R \to 0$. Como hemos visto, esto ocurre cuando $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ es pequeño, lo cual se produce cuando la energía potencial cambia muy poco en una distancia Δx.

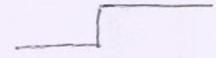
El cambio de U es

$$\Delta U = \frac{dU}{dx} \Delta x \qquad (15)$$

Para que ΔU sea pequeño, $\frac{dU}{dx}$ debe ser pequeño. Supongamos que Δx es una distancia igual a λ.

Entonces para que haya una reflexión muy baja ($R \to 0$; límite clásico), la U debe cambiar muy gradualmente en función de x ($\frac{dU}{dx}$ debe ser un valor pequeño) en una distancia Δx igual a una longitud de onda. Este es el criterio para establecer si el comportamiento de la partícula se aproximará al comportamiento clásico en este caso en que $E > U$.

El hecho de que U debe cambiar muy gradualmente puede verse como que el potencial escalón en lugar de ser "brusco":  se suaviza y es: 

, de modo que el cambio en U se produce gradualmente en una distancia $\Delta x = \lambda$ (o cualquier distancia de referencia característica del sistema que se analiza) y no "bruscamente" en una distancia $\Delta x = 0$ como en el caso  .

Para partículas en sistemas atómicos o nucleares, la longitud de onda de las partículas puede ser grande comparada con la distancia en la que el potencial que experimentan dichas partículas cambia apreciablemente. En este caso, el potencial escalón abrupto  es una buena aproximación.

Para estas partículas, la probabilidad de ser reflejadas es grande.

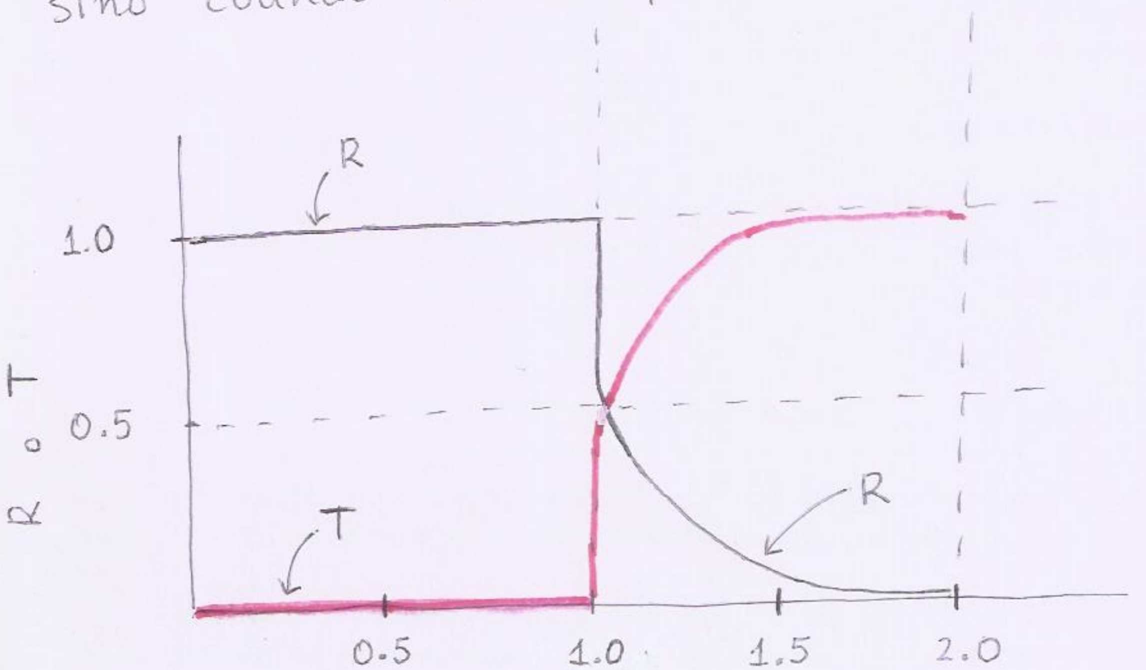
Más comentarios sobre la reflexión

$$R = \frac{(k_I - k_{II})^2}{(k_I + k_{II})^2} = \left(\frac{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} - \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}}{\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} + \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}} \right)^2 \qquad (1)$$

$$R = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 - U/E}} \right)^2 \qquad (2)$$

Es importante tener en mente que R depende de la fracción U/E y no de E solamente.

El límite clásico se obtiene cuando $\frac{U}{E} \to 0$ y no necesariamente cuando E es grande por si solo sino cuando E comparado con U es grande.



Ver Fig. 6.11 Eisberg - Resnick pag. 239

De la figura se observa que cuando $E = 2U$, la reflexión se hace pequeña pero existe !!